Correction devoir Maison n°5.

Exercice 1

Première Partie

① On calcule $P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

② On a $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

③. On montre par récurrence que $\mathcal{P}_n : \{ M^n = PD^nP^{-1} \}$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

- Initialisation : $M^0 = I_3$ et $P \times D^0 \times P^{-1} = P \times I_3 \times P^{-1} = P \times P^{-1} = I_3$.

  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

  On a alors
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= P \times D^{n+1} \times P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $M^n = P \times D^n \times P^{-1}$

④ La matrice D est diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$

$$PD^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & -2 \times (1/3)^n \\ 1 & -(1/2)^n & (1/3)^n \end{pmatrix}$$

et
$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/3)^n \\ 0 & (1/2)^n & -2(1/3)^n \\ 1 & -(1/2)^n & (1/3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1/3)^n & 0 & 0 \\ 2 \times (1/2)^n - 2(1/3)^n & (1/2)^n & 0 \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n & 1 - (1/2)^n & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ En posant $n = 0$, on a bien $\boxed{M^0 = I_3}$

En posant $n = 1$, on a bien $M^1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{2}{3} & 1/2 & 0 \\ 1 - 1 + 1/3 & 1 - 1/2 & 1 \end{pmatrix} = M$.

Deuxième partie

① A_1 : "A l'issue du 1^{ere} tirage, l'urne contient 3 boules" correspond à l'évènement "on a tiré la boule n°2" $p(A_1) = \frac{1}{3}$.

De même B_1 correspond à "On a tiré la boule n°1 au 1^{er} tirage".

C_1 : "On a tiré la boule n°0 au 1^{er} tirage".

$p(B_1) = \frac{1}{3}$ $p(C_1) = \frac{1}{3}$ Donc $U_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

② A l'issue de chaque tirage, l'urne contiendra 1, 2 ou 3 boules.

Ainsi $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$.

et $A_n \cap B_n = \emptyset$, $A_n \cap C_n = \emptyset$, $B_n \cap C_n = \emptyset$

Donc A_n, B_n, C_n est un système complet d'évènement.

③ D'après la formule des probabilités totales,

$$p(A_{n+1}) = p(A_n)\, p_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n)\, p_{B_n}(A_{n+1}) + p(C_n)\, p_{C_n}(A_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times 0 + c_n \times 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$$

$$p(B_{n+1}) = p(A_n)\, p_{A_n}(B_{n+1}) + p(B_n)\, p_{B_n}(B_{n+1}) + p(C_n)\, p_{C_n}(B_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 0$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n.$$

$$p(C_{n+1}) = p(A_n)\, p_{A_n}(C_{n+1}) + p(B_n)\, p_{B_n}(C_{n+1}) + p(C_n)\, p_{C_n}(C_{n+1})$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} = a_n \times \frac{1}{3} + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times 1$$

$$\Leftrightarrow c_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n$$

Ainsi on a $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} a_n \\ \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n \\ \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

$$\boxed{U_{n+1} = M \times U_n.}$$

④ On montre par récurrence les propositions $\mathcal{P}_n : \{ U_n = M^n U_0 \}$.

<u>Initialisation</u> : $M^0 \times U_0 = I_3 \times U_0 = U_0$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 0$

$$U_{n+1} = M U_n$$
$$= M \times M^n \times U_0$$
$$\boxed{U_{n+1} = M^{n+1} \times U_0}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire.

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = M^n U_0$

⑤ <u>Ainsi</u>
$$U_n = \begin{pmatrix} (1/3)^n & 0 & 0 \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n & (1/2)^n & 0 \\ 1 - 2(1/2)^n + (1/3)^n & 1-(1/2)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1/3)^n \\ 2(1/2)^n - 2(1/3)^n \\ 1 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

⑥ (a) $p(D_1) = p(C_1) = \frac{1}{3}$.

(b) A_1, B_1, C_1 est un système complet d'évènements.

$$p(D_2) = p(A_1) \times p_{A_1}(D_2) + p(B_1) \times p_{B_1}(D_2) + p(C_1) \times p_{C_1}(D_2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 0$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

(c) $A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}$ est un système complet d'évènements.
D'après la formule des probabilités totales.

$$p(D_n) = p(A_{n-1}) p_{A_{n-1}}(D_n) + p(B_{n-1}) p_{B_{n-1}}(D_n) + p(C_{n-1}) p_{C_{n-1}}(D_n)$$
$$= a_{n-1} \times \frac{1}{3} + b_{n-1} \times \frac{1}{2} + 0$$
$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \times \frac{1}{2}.$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - 3)$$
$$p(D_n) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Exercice 2

① Première méthode

(a) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(2k+1)^3 = (2k)^3 + 3\times(2k)^2\times 1 + 3\times 2k\times 1^2 + \cancel{3\times}(2k)^0\times 1^3$$

$$\boxed{= 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1.}$$

(b) On a alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$$

$$= 8\sum_{k=0}^{n}k^3 + 12\sum_{k=0}^{n}k^2 + 6\sum_{k=0}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}1.$$

$$= 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 12\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6\,\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 2n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) + (n+1)$$

$$= (n+1)\left(2n^2(n+1) + 2n(2n+1) + 3n + 1\right).$$

$$= (n+1)\left(2n^3 + 2n^2 + 4n^2 + 2n + 3n + 1\right)$$

$$= (n+1)\left(2n^3 + 6n^2 + 5n^{\cancel{2}} + 1\right).$$

Or $(n+1)(2n^2+4n+1) = 2n^3 + 4n^2 + n + 2n^2 + 4n + 1$

$$= 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1.$$

Donc $S_n = (n+1)(n+1)(2n^2+4n+1).$

$$\boxed{S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$$

Exercice 2 - Deuxième méthode

- On montre par récurrence $\mathcal{P}_n : \{ S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1) \}$.

- Initialisation : $S_0 = \sum_{k=0}^{0} (2k+1)^3 = 1^3 = 1$.
et $(0+1)^2(2\times 0^2 + 4\times 0 + 1) = 1$
Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

- Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 0$

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} (2k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^3 + (2(n+1)+1)^3$$
$$= (n+1)^2(2n^2+4n+1) + (2n+3)^3 .$$

Grâce au binôme de Newton, on a :

$$(2n+3)^3 = (2n)^3 + 3\times(2n)^2\times 3 + 3\times(2n)\times 3^2 + 3^3$$
$$= 8n^3 + 36n^2 + 54n + 27 .$$

et
$$(n+1)^2(2n^2+4n+1) = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1)$$
$$= 2n^4 + 4n^3 + n^2 + 4n^3 + 8n^2 + 2n + 2n^2 + 4n + 1$$
$$= 2n^4 + 8n^3 + 11n^2 + 6n + 1 .$$

Ainsi $S_{n+1} = 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$

D'autre part, on calcule

$$(n+1+1)^2(2(n+1)^2 + 4\times(n+1)+1) = (n+2)^2(2n^2+4n+2+4n+4+1)$$
$$= (n^2+4n+4)(2n^2+8n+7)$$
$$= 2n^4 + 8n^3 + 7n^2 + 8n^3 + 32n^2 + 28n + 8n^2 + 32n + 28$$
$$= 2n^4 + 16n^3 + 47n^2 + 60n + 28$$

Donc $S_{n+1} = (n+1+1)^2(2(n+1)^2 + 4\times(n+1) + 1)$.

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie (S_n) est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$

③ Troisième méthode

(a) T_n : Somme des nombres pairs de 0 à $2n$.

S_n : Somme des nombre impairs de 0 à $2n+1$

U_n : Somme des entiers de 0 à $2n+1$.

Donc $\boxed{T_n + S_n = U_n}$

(b) $$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^3 = \sum_{k=0}^{n} 8k^3$$

$$= 8\sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$\boxed{T_n = 8\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2} = 2n^2(n+1)^2$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^3 = \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)\times \cancel{2}(n+1)}{\cancel{2}}\right)^2$$

$$= (2n+1)^2(n+1)^2$$

Ainsi $$S_n = U_n - T_n$$

$$= (2n+1)^2(n+1)^2 - 2n^2(n+1)^2$$

$$= \left((2n+1)^2 - 2n^2\right)(n+1)^2$$

$$= (n+1)^2\left(4n^2+4n+1-2n^2\right)$$

$$\boxed{S_n = (n+1)^2(2n^2+4n+1)}$$

Exercice 3

(1) On notera M : L'ensemble des livres de maths $\qquad \# M = 10$
C : L'ensemble des bandes dessinées $\qquad \# C = 20$

Le choix pour les livres de maths, noté A est une ~~arrangement~~ combinaison de 3 éléments de M (on choisit 3 livres, il n'y a pas de remise, pas d'ordre non plus).

Ainsi $\# A = C_3^{10} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120$

L'ensemble des choix pour les BD, noté B est une combinaison de 2 éléments de C (pour les même raison).

$\# B = C_2^{20} = \dfrac{20 \times 19}{2} = 190$.

On cherche alors le cardinal de $A \times B$ (il achète des livres de maths puis les BD).

$$\boxed{\#(A \times B) = \# A \times \# B = 120 \times 190 = 22800}$$

(2) Il a 5 livres. L'ensemble des façons de faire une pile est l'ensemble des permutations de ses livres.

Ainsi il y a $\boxed{5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120}$ façons de faire une pile.

(3) Les livres de maths sont en bas. L'ensemble des arrangements des livres de maths, noté C est ~~une~~ l'ensemble des permutations des livres de math

$\# C = 3! = 6$

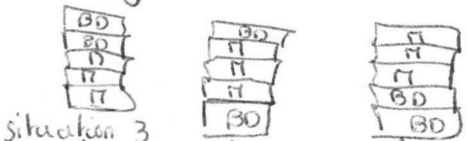
De même, l'ensemble des arrangements des BD est

$\# D = 2! = 2$.

Ainsi l'ensemble des arrangements possible est

$\#(C \times D) = 6 \times 2 \boxed{= 12.}$

(4) Il s'agit d'une variante de la situation précédente.



situation 3 A_1 $\qquad A_2 \qquad A_3$

Il y a 3 situations possibles. Le nombre d'arrangement possible est $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \# A_1 + \# A_2 + \# A_3 = 12 + 12 + 12 \boxed{= 36}$